892. りーまん面ノ寫像函數ノ次數評價ニ就イテ I

小 林　善 一（東京高師）

りーまん面ノ寫像函數ノ逆函數デアル有理型函數 $w(z)$ ノ次數（之ハ面ニ特有ナ數ニナリマスカラ、以下單ニりーまん面ノ次數ト云フコトニ致シマス）ヲ線状複体ニヨッテ定メル問題ヲ考ヘテ見マシタ。Ullrich 氏一派ノ人々ノヤッテ居ル問題ノ一ツデスカラ、アチラデハ相當進ンデ居ルコトト思ハレマス。茲ニハ上カラノ評價ヲ試ミテ見マス。方法等ニツキ皆様ノ御教示ヲイタダキタイト思ヒマス。

$|z|<\infty$ ニ於ケル有理型函數 $w(z)$ ノ次數トハ $T(r)$ ノ次數ノコトデ $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{\log T(r)}{\log r}$ デ定義サレル。Picard-Borel ノ定理ニヨレバ此ノモノハ高々ニツノ a 点ヲ除イテ $N(r,a)$, $n(r,a)$ ノ次數ニ等シイ。從ッテ $n(r,a)$ ノ次數ヲ調ベレバヨイ。Ahlfors ノ歪曲定理ニヨル等角幾何學的ナ方法ヲ用ヒル。單純ナ面デハ眞ノ次數ガ出ル。

簡單ノタメニりーまん面 F ハ p 箇ノ底点（Grundpunkter）ヲ持ツモノトシ而モ之等ノ底点ハ w 平面ノ單位円ノ等分点

$$a_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{p}}, \quad \nu = 0,1,2,\cdots\cdots,p-1$$

トスル。ソノ Elfving ノ意味ノ複体ヲ T トシ，$T^{t}(0$

次節点カラ t 以内ノ距離ニアルTノ点ノ全体）ノ縁ノ長サ，但シ代数及ビ正則基本範囲（Elemental domain）ニツイテハ其ノ T^t ニ属スル円ノ部分ト T^t ニ属シナイ円ノ部分ノ長サノ短イ方ヲ取ルモノトシテ $\sigma(t)$ トスル。又 T^t ニ属スル奇数次（偶数次，又ハソレラノ和デモヨイ）ノ節点ノ総数ヲ $\nu(t)$ トスル。然ルトキハFノ次数ハ

$$(1)\qquad \frac{1}{4}\overline{\lim}\frac{\log\nu(t)}{\displaystyle\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{\sigma(t)}}$$

ヲ越ヘナイ。

先ヅFカラ角谷サンノ面ニ類似ノモノKヲ作リマス。Fヲ半直線 $\arg w=\frac{2\nu\pi}{p}$，$\nu=0,1,2,\cdots\cdots,p-1$ デ可附番無限ノ単葉角範囲ニ分ケル。角範囲 $\frac{2\nu\pi}{p}<\arg w<\frac{2(\nu+1)\pi}{p}$ ヲ函数

$$(2)\qquad h=\frac{1}{\pi}\log\frac{w^{\frac{p}{2}}-a_{\nu}^{\frac{p}{2}}}{w^{\frac{p}{2}}+a_{\nu+1}^{\frac{p}{2}}}$$

ニヨツテ h 平面ノ実軸ニ平行ナ巾1ノ帯ニ写シマス。此ノトキ角範囲ノ二等分線 $\arg w=\frac{(2\nu+1)\pi}{p}$ ノ像ハ虚軸上ニ，極点 a_ν，$a_{\nu+1}$ ノ像ハ夫々 $+\infty$，$-\infty$ ニ，単位円内ノ角範囲ノ辺ハ帯ノ下縁ニ，円外ノ辺ハ上縁ニ写サレル。ソレカラ

1°. $w=0$ ガ n 次，$w=\infty$ ガ $(n+1)$ 次節点デアル角範囲ノ像ハ虚軸ヲ折目トシテ左ノ部分ヲ右へ折リ返シテ重

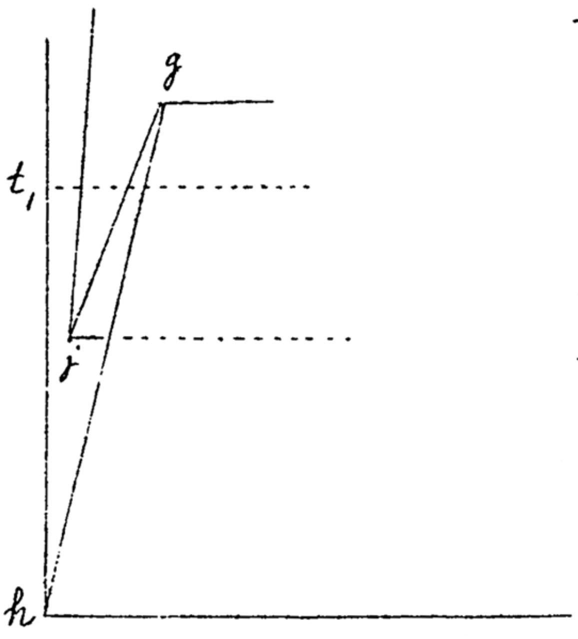
ネル。ソノ上デ $n < I(h) < n+1$ 迄平行移動スル。

2°. $w=\infty$ ガn次，$w=0$ ガ$(n+1)$次節点デアル角範囲ノ像ハ一度実軸ニ関シテ裏返シテカラ1°ト同ジ操作ヲスル。

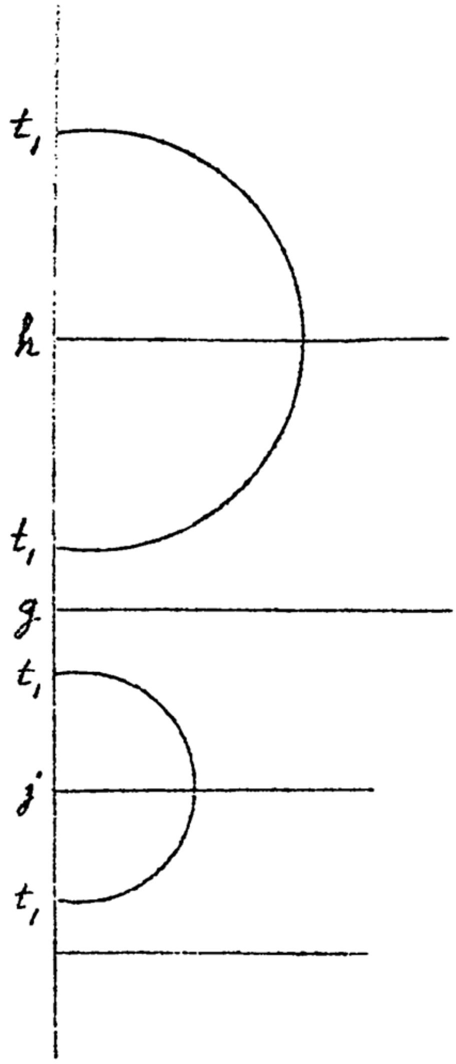
Fノ全部ノ角範囲デカク写像スレバ夫レ等ノ縁ハ原像通リ一致シテ居リ、両側ノ写像モ亦コノ上デ一致スル故，Fニ従ッテ貼布シテオケバ，連結的ナ面Kヲ得ル．夫レ故KトFノ点ハ一對一連続デ，角範囲ノ上デハ等角或ハソノ裏返シニナッテ居ル．Kハ虚軸上ニ Elfving ノ複体Tヲ実現シテ居ル。

Fヲ $|z|<\infty$ ヘ等角ニ写像シテ $w=0$ ノ0次節点ガ $z=0$ ニ移ルトスル．$\log z = u+iv$, $0<v<2\pi$ トスル．面Kノ座標ヲ $h = s+it$ トシテ，K上ノ単一閉曲線 $\Theta(t_1)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

1°. 對数分岐点 l ニ對應スル基本範囲（l ノ近傍ニ對應スルKノ部分）デハ虚軸上 $t \leq t_1$ ナル点全体ハ若干ノ折レ重ナッタ線分トナル故之レ等ヲ直径トスル半円ヲ此ノ範囲ニ書イテ $\Theta(t_1)$ ノ部分トスル。（一度展開シテ円ヲ書イテ元通リ折リ重ネル意）周ノ長サノ和ハ直径ノ和ノ $\frac{\pi}{2}$ 倍、即チ $\sigma(t_1)$ ノ此ノ範囲ノ分前ノ $\frac{\pi}{2}$ 倍デアル。



t_1 ガ増加スルニツレテ此ノ各



々ノ円ノ直径ハ大キクナリ左圖ノgノヨウナ点デ切スルニ至ルト二ツノ円ハ直径ノ和ヲ直径トスル一ツノ円デ置キ換ヘルコトニナル。

2°. 代數分岐点又ハ正則点 a ニ對應スルKノ基本範囲ハ筒状ニナル。$m \leqq I(k) \leqq h$ ニアルトスルト，$m \leqq I(k) < t^*$ ニ於ケル虚軸上ノ境界線ノ長サノ和ガ全周ノ丁度 $\frac{1}{2}$ ニナル如キ t^* ガトレル。$m \leqq t_1 < t^*$ ニ對シテハ1°ト同様ノ円周ヲ書イテ Ⓗ(t_1) ノ部分ノ候補者トスル。$t^* \leqq t_1 < h$ ナル t_1 ニ対シテハ $t \geqq t_1$ ニアル範囲ノ周ヲ直径トスル半円周（展開シテ書イテ元ニ戻スコト1°ノ通リ）ヲ Ⓗ(t_1) ノ部分トスル。t_1 ヲ増加スルトキ，半径ガ不連続ニ変ルノハ折レ目ニ當ル t_1 及ビ t^* デアル。Ⓗ(t_1) ヲ右方連続ニスルタメニ、一ツノ半円ガ二ツノ半円ニ分レル所デハ分レル方ヲ採用スル。

全部ノKノ基本範囲ニツイテ1°, 2°ノ円周ヲ書イテ、併セタモノノ一番外方ノ單一閉曲線ヲ Ⓗ(t_1) トスル。Tデ云ヘバ等次曲線ノ一番外側ニ当ル。T^t ハ丁度ソノ内部ニ包囲サレル。t_1 ヲ増加スレバ Ⓗ(t_1) ハ t_1 ノ孤立値ヲ除イテ連続ニ後戻リスルコトナク変リ、$t_1 \longrightarrow \infty$ トスレバ有限

ニ孤立セル穴ヲ残シテ面Kヲ蓋ス。$\textcircled{H}(t_1)$ ノ長サハ定理デ述ベタ $\sigma(t_1)$ ノ $\frac{\pi}{2}$ 倍デアル。

$\log z = u + iv$ 帯ニ於テ $\textcircled{H}(t)$ ノ像ヲ L_t トシ

$$u_2(t) = \max_{s\in \textcircled{H}(t)} u(s,t), \quad u_1(t) = \min_{s\in\textcircled{H}(t)} u(s,t)$$

$$\omega(t) = u_2(t) - u_1(t)$$

トオケバ

$$\sqrt{4\pi^2 + \omega^2} \leqq \int_{\textcircled{H}(t)} \left| \frac{d\log z}{ds} \right| |ds|$$

Schwarz ノ補助定理ニヨツテ

$$4\pi^2 + \omega^2 \leqq \int_{\textcircled{H}(t)} |ds| \int_{\textcircled{H}(t)} \left| \frac{d\log z}{ds} \right|^2 |ds|$$

$$8\pi \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sigma(t)} + \frac{2}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\omega^2}{\sigma(t)}\, dt$$

$$\leqq \int_{t_1}^{t_2} \int_{\textcircled{H}(t)} \left| \frac{d\log z}{ds} \right|^2 |ds|\, dt$$

右辺ハ区間 (t_1, t_2) ノ t ニ對スル $\textcircled{H}(t)$ ノ像 L_t ノ画リ画分ノ面積デアツテ

$$2\pi \{ u_2(t_2) - u_1(t_1) \} = 2\pi \{ u_1(t_2) - u_2(t_1) + \omega(t_1) + \omega(t_2) \}$$

ヨリ大デナイ. 即チ

$$u_1(t_2) - u_1(t_1) \geqq 4 \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sigma(t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\omega^2}{\sigma(t)}\, dt - \omega(t_1) - \omega(t_2)$$

之カラ後ハ. Ahlfors ノ方法ト全ク同ジデ

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{\sigma(t)}>2$$

ナル場合ニハ

$$(3)\qquad u_1(t_2)-u_2(t_1)\geqq 4\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{\sigma(t)}-8\pi$$

ガ成立スル。

$u_1(t_2)$ ハ t_2 ノ孤立点ヲ除イテ連続, 単調増加デアル。不連続点ニ於テハ左方ニ連続デアル。$r=|z|$ トオキ $n(r,\infty)$ ヲ $w(z)$ ノ無限点ノ個数, $u_1(t)=\log r$ トオケバ

$$n(r,\infty)\leqq \nu(t)$$

$\nu(t)$ ハ複体部分 T^t ノ奇数次節点ノ総数

依ッテ (3) ト結ンデ, 十分大ナル t ニ對シテ

$$(4)\qquad \frac{\log n(r,\infty)}{u_1(t)-u_2(t_1)}\leqq\frac{\log\nu(t)}{4\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{\sigma(t)}-8\pi}$$

$t=\bar{t}$ デ $u_1(t)$ ガ不連続デアルトスルト u_1 ノ単調性カラ $\lim_{t\to\bar{t}-0}u_1(t)=u'$ ナル u' ガアル. $u'\leqq u<u_1(\bar{t})$ ナル u ニ對シテハ $u'=\log r'$, $u_1(\bar{t})=\log\bar{r}$ トオイテ

$$\frac{\log n(r,\infty)}{u-u_2(t_1)}\leqq\frac{\log n(\bar{r},\infty)}{u_1(\bar{t}-\Delta t)-u_2(t_1)}$$

$\Delta t>0$

$$\leqq \frac{\log \nu(\bar{t})}{4\int_{t_1}^{\bar{t}-\Delta t}\frac{dt}{\sigma(t)}-8\pi}$$

$\Delta t>0$ ハ如何ニ小サクトモヨイシ，右辺ノ積分ハ上限ニツイテハ連続デアルカラ $u'\leqq u<u_1(\bar{t})$ ナル u ニ對シテモ

$$(5)\quad \frac{\log n(r,\infty)}{u-u_2(t_1)}\leqq\frac{\log\nu(\bar{t})}{4\int_{t_1}^{\bar{t}}\frac{dt}{\sigma(t)}dt-8\pi}$$

ガ成立スル。(4), (5) カラ u_1 t ヲ独立ニ無限大トスルトキ不等式

$$(1)\quad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(r,\infty)}{\log r}\leqq\frac{1}{4}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\log\nu(t)}{\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{\sigma(t)}}$$

之デ証明ガ終ル。

應用トシテ二，三ノ例ヲ計算スル。

(I) Ullrich ノ所謂 q 本ノ週期端 (periodische Euden) ヲ持ツリーまん面ノ次数

十分大ナル t ニ対シテ複体 T ノ部分 T^t ノ奇數次節点ノ箇數 $\nu(t)$ 縁ノ長サ（代數基本範囲ニ修正ヲ加ヘタル）$\sigma(t)$ ニ対シテ夫々

$$(6)\quad \begin{cases}\nu(t)\leqq c_1 t\\ \sigma(t)\leqq 2q\,t+c_2\end{cases}$$

ヲ満足スル常數 c_1, c_2 ガ存在スル (1) ハ

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim}\,\frac{\log\nu(t)}{\displaystyle\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{\sigma(t)}}$$

$$\leqq \frac{1}{4}\,\overline{\lim}\,\frac{\log t+\log c_1}{\frac{1}{2q}\left\{\log\left(t+\frac{c_2}{2q}\right)-\log\left(t_1+\frac{c_2}{2q}\right)\right\}}$$

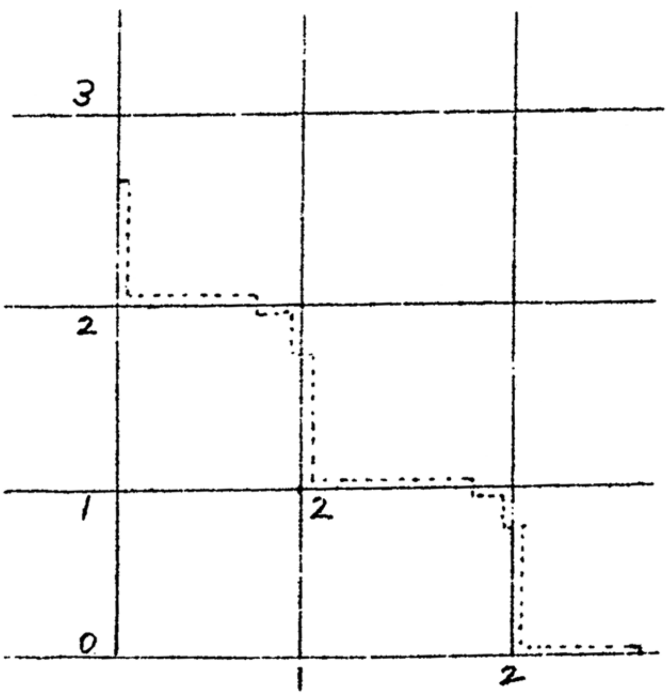
$$=\frac{q}{2}$$

$q>1$ ノトキハ Ahlfors ノ漸近値ニ対スル定理デ逆ニ次數ガオサヘラレル。丁度 $\frac{q}{2}$ ガソノ次數ニナル(Ullrich ノ定理)

$q=1$ デ對數分岐点ヲ持タナイ一本ノ週期端カラナルりーまん面ノ次數ハ0

之等ノ結果ハ端ガ週期的デナクトモ(6)ヲ満足スル常數 q, c_1, C_2 ガトレヽバヨイ。

(II) $\wp(z)$ 及ビ夫等ニ類似ノ面ノ次數



$\wp(z)$ デハ

$$\nu(t)\leqq 4t^2$$

$$\sigma(t)=8t \text{(左図点線)}$$

$$\frac{1}{4}\lim\frac{\log\nu(t)}{\displaystyle\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{\sigma(t)}}=4$$

左圖デ第II, III象限ヲ消シタ複体ハ次數ノ上界3ヲ得ル。

$p(z)$ ノ次數ハ2デアルカラ、上ノ結果ハ未ダ改良ノ餘地ガアッテ夫ハ代數分岐點ノ近傍ニ対スル幾何學的技巧ノ問題デアル。